4. A mérések pontosságának megítélése

4.1. A hibaterjedési törvény

Ha egy F változót az $x_1, x_2, x_3, .., x_r$ közvetlenül mért adatokból számítunk ki

$$F = F\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r\right) \tag{4.1}$$

bizonytalanságát a hibaterjedési törvényből kaphatjuk meg:

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_r}\right) \sigma_{xr}^2 \tag{4.2}$$

ahol σ_{xj}^2 a j-edik közvetlenül mért változó (x_j) mérésének bizonytalanságát kifejező variancia (szórásnégyzet). E képlet alkalmazásakor feltételezzük, hogy az elemi méréseknél csak véletlen hibát követünk el, melynek várható értéke zérus. Amennyibe x_j maga is számított változó (pl. $W = \frac{\Delta V}{\Delta t}$), σ_{xj}^2 ugyancsak a hibaterjedési törvényből határozható meg.

A kérdés most már csak az, honnan vegyük (hogyan becsüljük) a közvetlenül mért x_j változók σ_{xj}^2 varianciáját.

Az elemi mérés véletlen hibájáról úgy szerzünk tudomást, hogy a mért (a műszerről leolvasott) értékek ismételt leolvasásukkor szóródást mutatnak, még akkor is, ha a mérendő mennyiség biztosan állandó. Elvben tehát a műszerek ismételt leolvasásával nyert értékekből korrigált tapasztalati szórásnégyzetet számíthatunk, amely alkalmas becslése σ_{xj}^2 -nek:

$$s^2 = \frac{\sum_i^n \left(x_{ji} - \bar{x}_j\right)}{n-1}.$$

A műszereket azonban általában úgy szerkesztik, hogy leolvashatóságuk összhangban legyen a mérési pontosságukkal, a mérés véletlen hibája okozta szóródás ne legyen észlelhető.

Például a csőrugós manométerhez akkora körlap-skálát készítenek, hogy ne lehessen 0,1 bar-nál finomabban leolvasni; a hőmérő higanyszálának magasságát sem szokás 0,01 mm különbség észlelésére alkalmas katetométerrel mérni.

Természetesen e megfontolásoknál a rendszeres hibát is figyelembe veszik. Például a higanyos hőmérő ésszerű skálabeosztásának finomítását az üvegcső keresztmetszetének egyenetlenségei is korlátozzák, analitikai mérlegnél a skálabeosztás finomsága alapján leolvasható tömeg nem pontosabb, mint amit a súlyok pontossága és a mérleg konstrukciójából eredő érzékenysége lehetővé tesz stb.

Ha a műszer több leolvasásnál (egymástól független mérésnél) ugyanazt az értéket mutatja, akkor sem gondolhatjuk, hogy a méréskor nem követünk el véletlen hibát, csak a szóródás kisebb az észlelhetőnél.

Jelöljük a műszer érzékenységét (és ezzel összhangban lévő leolvashatóságát) δ_0-lal, pl. 0,1 ^{0}C beosztású hőmérőnél δ_0 = 0,02 ^{0}C. Legyen a mért változó valódi értéke X. Feltételezéseink szerint az X helyett mért x normális eloszlású, X várható értékkel és σ_x^2 varianciával. Ha a műszerről többször ugyanazt az x értéket olvassuk le, ez azt jelenti, hogy az észlelt adatok hibája a $-\frac{\delta_0}{2} < x - X < \frac{\delta_0}{2}$ intervallumban van. Egy normális eloszlású valószínűségi változó

68,3% valószínűséggel a $\pm\sigma$,
95,5% valószínűséggel a $\pm 2\sigma$,
99,7% valószínűséggel a $\pm 3\sigma$

intervallumba esik. Ha a műszer mindig ugyanazt az értéket mutatja, valamelyes önkényességgel azt mondhatjuk, hogy $-3\sigma < x - X < 3\sigma$, vagyis $\pm\frac{\delta_0}{2} = \pm 3\sigma$, azaz $\delta_0 = \pm 3\sigma$. Így σ a δ_0-nak, a skála leolvashatóságának 1/6-a, pl. 0,1 ^{0}C-os skálabeosztáshoz

$$\frac{0{,}02}{6} = 0{,}0033\,.$$

Egyes műszereken bekarikázott szám jelzi az ún. osztálypontosságot, vagyis azt, hogy a mérési pontosság a műszer végkitérésének hány százaléka.

Gyakran egy mérni kívánt változó értéke maga is ingadozik. Például ha egy laboratóriumi termosztáttal "beállított" hőmérsékletet Beckmann-hômérôvel mérünk, az ismételt leolvasáskor különböző értékeket kapunk, holott a Beckmann-hômérô ezredfokos leolvashatóságához ilyen mérési pontosság is tartozik. Tehát a tapasztalt szóródást nem tulajdoníthatjuk nagyrészt a mérés véletlen hibájának.

Jelölje σ_{x0}^2 a mérni kívánt változó értéke ingadozásának varianciáját, σ_{xm}^2 a mérési hiba varianciáját! A többszöri leolvasáskor észlelhető eltérések varianciája a kettő összege:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x0}^2 + \sigma_{xm}^2\,. \tag{4.3}$$

Olyan mérőeszközt tanácsos választani, amelyen a mért változó értékének ingadozása nem észlelhető. Ilyen, megfelelően illesztett műszer esetén a két hatás együttese az, amit nem észlelünk, ezért a két variancia összege négyzetgyökének hatszorosát ($\pm 3\sigma$) vehetjük egyenlőnek a műszer leolvashatóságával.

Példa

Térfogatáram-mérő eszköz (rotaméter) kalibrálását D = 1m átmérőjű, szintmutatóval ellátott tartállyal és órával végzünk. Mennyi ideig kell a mérést végezni, vagyis mennyi legyen a mért térfogat, ha azt akarjuk, hogy a térfogatáram mérésének hibája (3σ) ne legyen nagyobb 5 dm^3/h -nál, 1000 dm^3/h átfolyó térfogatáram mérése esetén?

A térfogatáram értékét a tartályban lévő víz ΔV térfogatváltozásából és az ehhez szükséges Δt időtartamból számítjuk:

$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t}, \text{ és } \Delta V = \frac{\pi}{4}\Delta h = 0{,}785\Delta h \ \text{m}^3,$$

ahol Δh a szintváltozás.

$$\dot{V} = \frac{1}{3600} = 2{,}778 \cdot 10^{-4} \ \text{m}^3/\text{s}$$

A tartály szintmutatóján a skála leolvashatósága 1 mm (2 mm-es skálaosztás), ezért:

$$\sigma_h = \frac{10^{-3}}{6} = 1{,}666 \cdot 10^{-4} \ \text{m}.$$

A folyadékszint változásának $\sigma^2_{\Delta h}$ varianciája:

$$\sigma^2_{\Delta h} = 2\sigma^2_h = 2 \cdot \left(1{,}666 \cdot 10^{-4}\right)^2 = 2 \cdot 2{,}775 \cdot 10^{-8} = 5{,}551 \cdot 10^{-8} = \left(2{,}356 \cdot 10^{-4}\right)^2.$$

A tartályba befolyt víz mért ΔV térfogatának $\sigma_{\Delta V}$ varianciája a (4.2) hibaterjedési törvényből:

$$\sigma^2_{\Delta V} = 0{,}785^2 \sigma^2_{\Delta h} = \left(0{,}785 \cdot 2{,}356 \cdot 10^{-4}\right)^2 = \left(1{,}847 \cdot 10^{-4}\right)^2 = 3{,}412 \cdot 10^{-8} \ \text{m}^6$$

A Δi idő mérési hibája a stopperóra indításakor és leállításakor a reakcióidő bizonytalanságából (becslésünk szerint $\sigma_{\text{ind.}} = \sigma_{\text{leáll}} \approx 0{,}01\,\text{s}$) és a stopperóra leolvashatóságából (0,2 s) adódik:

$$\sigma^2_{\Delta t} = \sigma^2_{\text{ind}} + \sigma^2_{\text{leáll}} + \sigma^2_0,$$

ahol

$$\sigma^2_{\text{ind}} = (0{,}01)^2 = 1{,}00 \cdot 10^{-4} \ \text{s}^2;$$

$$\sigma^2_0 = \left(\frac{0{,}2}{6}\right)^2 = 1{,}111 \cdot 10^{-3} \ \text{s}^2;$$

$$\sigma^2_{\Delta t} = 2 \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-4} + 1{,}111 \cdot 10^{-3} = 1{,}311 \cdot 10^{-3} \ \text{s}^2.$$

A mért térfogatáram varianciája a hibaterjedési törvényből:

$$\sigma^2_{\dot{V}} \approx \left(\frac{\partial \dot{V}}{\partial \Delta V}\right)^2 \sigma^2_{\Delta V} + \left(\frac{\partial \dot{V}}{\partial \Delta t}\right)^2 \sigma^2_{\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \sigma^2_{\Delta V} + \left(\frac{\Delta V}{\Delta t^2}\right)^2 \sigma^2_{\Delta t} = \left(\frac{\dot{V}}{\Delta V}\right)^2 \sigma^2_{\Delta V} + \left(\frac{\dot{V}^2}{\Delta V}\right)^2 \sigma^2_{\Delta t}.$$

A feladat szerint

$$\sigma_{\dot V}^2 \approx \left(\frac{5\cdot 10^{-3}}{3600\cdot 3}\right)^2 = 2{,}143\cdot 10^{-13}\ \left(\mathrm{m^3/s}\right).$$

A térfogatáramnak a feladatban előírt pontosságú méréséhez szükséges minimálisan mérendő térfogatot úgy kapjuk meg, hogy az előbbi egyenletet ΔV-re megoldjuk:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{\dot V^2\sigma_{\Delta V}^2 + \dot V^4\sigma_{\Delta t}^2}{\sigma_{\dot V}^2}} = 0{,}1110\ \mathrm{m}^3 \approx 111\ \mathrm{dm}^3.$$

Az 1m átmérőjű tartályban a 0,111 m^3 térfogatváltozásnak 14,1 cm szintváltozás felel meg.

Vizsgáljuk meg, hogy $\sigma_{\dot V}^2$ értéke milyen arányban származik ΔV ill. Δt mérési hibájából.

$$\sigma_{\dot V}^2 = \left(\frac{2{,}778\cdot 10^{-4}}{0{,}1110}\right)^2\cdot 3{,}412\cdot 10^{-8} + \left[\frac{\left(2{,}778\cdot 10^{-4}\right)^2}{0{,}1110}\right]^2\cdot 1{,}311\cdot 10^{-3} =$$

$$= 2{,}136\cdot 10^{-13} + 6{,}3\cdot 10^{-16} = 2{,}142\cdot 10^{-13}\ \left(\mathrm{m^3/s}\right)^2.$$

Amint látjuk, $\sigma_{\dot V}^2$ értéke 99,7 %-ban ΔV mérési hibájából származik. Ha a térfogatáram mérési pontosságát javítani akarjuk, akkor csökkenteni kell $\sigma_{\Delta V}^2$ értékét. Ez a szintmérés σ_h^2 varianciájának, vagy a tartály átmérőjének csökkentésével érhető el. Ha példánk körülményei között σ_h^2 tovább nem csökkenthető, és célunk $\sigma_{\dot V}^2$ csökkentése, kisebb átmérőjű tartályt kell használnunk. Ha nincs szükség a térfogatáram pontosabb mérésére, megfontolandó, hogy az időt stopperóra helyett karórával mérjük, mert az nem növelné lényegesen $\sigma_{\dot V}^2$ értékét.

4.2. Szempontok mérési jegyzőkönyvek készítéséhez

1. Minden adatot a mérési jegyzőkönyvbe kell írni, egyéb cédulák használata tilos. Ha több helyen kell egyidőben leolvasást végezni, és így a külön részjegyzőkönyvek használata elkerülhetetlen, azok a jegyzőkönyvhöz csatolandók.
2. A hibásan leírt számok javítása úgy történik, hogy a téves adatot áthúzzuk, és mellé- (alá-, fölé-) írjuk a helyeset.
3. Mindig a műszerről leolvasott (eredeti) adatokat kell leírni (pl. köbözésnél a szintmagasság kezdeti és végső értékét, nem pedig a szintkülönbséget vagy a

térfogatáramot), a számított adatok külön oszlopban vagy sorban szerepeljenek. Időpont-adat helyesen pl. 18^{07}, nem pedig 0 perc, 10 perc stb.

4. Minden számértéket olyan pontossággal kell leírni, amely megfelel a műszer leolvasási vagy mérési pontosságának ill. a számítási pontosságnak.

   - Tilos pl. ipari hőmérőről 0,05 ^{0}C pontossággal "leolvasni", de ha a finomabb belsőskálás hőmérő pontosan 100 ^{0}C-ot mutat, ez így írandó: 100,0 ^{0}C ill. 100,00 ^{0}C (a hőmérő pontosságától függően).

   - Ha két nyomás összegét kell kiszámítanunk, és az egyiket 0,1 bar pontosságú manométerről, a másikat 0,1 torr (~0,001 bar) pontosságú barométerről olvassuk le, az összeg csak 0,1 bar pontossággal adható meg. Ha két szám szorzatát állítjuk elő, szintén helytelen kiírni a kiszámítható, de értelmetlen fölösleges tizedes jegyeket, pl. $0{,}43*62{,}4=26{,}8$ (nem pedig 26,832).

5. A számításokat olyan részletességgel kell közölni, hogy a kiindulási adatok és a számítás menete is érthető és ellenőrizhető legyen.